

五南出版

微積分
初學者的福音

白話微積分



作者：卓永鴻

本書特色

- ★ 內容深入淺出，適合自學
- ★ 例題解答步驟詳細
- ★ 指出學習盲點

試閱本

5.5 有理函數的積分：部分分式法



■ 5.5 有理函數的積分：部分分式法

遇到積分

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (5.1)$$

我們可以因式分解，然後拆成兩項，便容易分別積出

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)} &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln|x-2| - \ln|x+2| \right] + C \end{aligned} \quad (5.2)$$

至於

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

可拆成

$$\int 1 - \frac{1}{x^2+1} dx = x - \tan^{-1}(x) + C$$

以上所示，不外簡單拆項與利用 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + C$ 。

一般來說，若是分子分母更複雜，比方說 $\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} dx$ ，就沒這麼容易了。

現在要探討的主題，就是一般而言，如何對於有理函數 $\frac{N(x)}{D(x)}$ 做積分，其中 $N(x), D(x)$ 為互質^①的多項式。

假如 $\frac{N(x)}{D(x)}$ 是假分式，即 $\deg N(x) \geq \deg D(x)$ ，那麼我們可以將其化為帶分式。就是說，先用除法原理寫成

$$N(x) = D(x)Q(x) + r(x)$$

於是原來分式

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{D(x)Q(x) + r(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$$

^① 即 $N(x), D(x)$ 最高公因式為 1。若不互質，消去公因式就好了。

$Q(x)$ 是多項式，積分毫不成問題，所以我們現在只須專注在真分式的處理方式。仿效式子(5.1)、式子(5.2)的經驗，我們首先對分母作因式分解，再試著把原分式拆開成幾個更簡單的分式。因為在大一微積分我們不太考慮複數的問題，所以可能會有不可分解的二次因式 $(ax^2 + bx + c)$, $b^2 - 4ac < 0$ 。分母 $D(x)$ 分解後可能是

$$D(x) = (x - a_1)^{d_1} (x - a_2)^{d_2} (x^2 + b_1x + c_1)^{d_3} (x^2 + b_2x + c_2)^{d_4}$$

有一次因式也有二次因式，各自有其次方。若一堆符號看來頭昏，舉個具體例子：

$$\frac{N(x)}{(x-1)^2(x+3)^5(x^2+x+4)(x^2-2x+5)^3}$$

但這樣看還是有點複雜，讓我們先看看較簡單的

$$\frac{N(x)}{(x+2)^4} \quad (5.3)$$

此時的分母是四次式，而我們一開始就預設整個式子是真分式，所以分子 $N(x)$ 必為三次以下。而對於三次以下的 $N(x)$ ，我們在高中學過，一定可以把它寫成

$$N(x) = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$$

於是式子(5.3)便成

$$\begin{aligned} & \frac{a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d}{(x+2)^4} \\ &= \frac{a(x+2)^3}{(x+2)^4} + \frac{b(x+2)^2}{(x+2)^4} + \frac{c(x+2)}{(x+2)^4} + \frac{d}{(x+2)^4} \\ &= \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3} + \frac{d}{(x+2)^4} \end{aligned}$$

這樣便成功拆成幾項好積的分式。

例題 5.5.1

$$\int \frac{2x^3 + 11x^2 + 23x + 13}{(x+2)^4} dx$$

解

如前所示，第一步要解出

$$2x^3 + 11x^2 + 23x + 13 = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$$

可使用綜合除法來解出那些係數。不過綜合除法並非唯一手段，也可以用比較係數。領導係數是 2，所以右式領導係數 $a = 2$ ；二次係數是 11，所以右式二次係數 $a \cdot 6 + b = 11 \Rightarrow b = -1$ ；一次係數是 23，所以右式一次係數 $a \cdot 12 + b \cdot 4 + c = 23 \Rightarrow c = 3$ ；常數項是 13，所以右式常數項 $a \cdot 8 + b \cdot 4 + c \cdot 2 + d = 13 \Rightarrow d = -5$ 。於是

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 23x + 13}{(x+2)^4} dx \\ &= \int \frac{2(x+2)^3 - (x+2)^2 + 3(x+2) - 5}{(x+2)^4} dx \\ &= 2 \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{(x+2)^2} + 3 \int \frac{dx}{(x+2)^3} - 5 \int \frac{dx}{(x+2)^4} \\ &= 2 \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{2(x+2)^2} + \frac{5}{3(x+2)^3} + C \end{aligned}$$

處理完分母只有一個一次因式的情形，現在來看分母是多個一次因式

$$\frac{N(x)}{(x+2)^4(x-1)^2} \quad (5.4)$$

只要先拆成

$$\frac{N_1(x)}{(x+2)^4} + \frac{N_2(x)}{(x-1)^2} \quad (5.5)$$

這樣立刻簡化為剛剛的問題！所以式子(5.4)最後會拆成

$$\frac{N(x)}{(x+2)^4(x-1)^2} \quad (5.6)$$

$$= \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3} + \frac{d}{(x+2)^4} \quad (5.7)$$

$$+ \frac{e}{x-1} + \frac{f}{(x-1)^2} \quad (5.8)$$

具體以 $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx$ 為例。先分解分母 $x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$ ，得知被積分函數可分解為

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \quad (5.9)$$

剛剛介紹不使用綜合除法的方法，其實是因為像現在如果我們還要先拆成 $\frac{N_1(x)}{x} + \frac{N_2(x)}{(x+1)^2}$ ，再分別用綜合除法，這樣太麻煩了，光是第一步就不好拆。既然我們已經知道最後會是式子(5.9)的形式，只要再設法解出未知係數就好了。為簡便，第一步可先等號兩邊同乘以分母，得到

$$\begin{aligned} 5x^2+20x+6 &= \left[\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \right] \cdot x(x+1)^2 \\ &= a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx \end{aligned} \quad (5.10)$$

接著比較係數

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 2a+b+c=20 \\ a=6 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c) = (6,-1,9) \quad (5.11)$$

這樣就知道

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx &= 6 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} + 9 \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= 6 \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + C \end{aligned}$$

比較係數並不總是簡便，像此例，比較係數就出現三元一次方程組，只是恰巧其中一個是 $a=6$ ，導致這裡可以很快解出。若在別題，也許不會這麼舒服。所以

這裡我再介紹另一個手法：代數值。因為式子(5.10)的意思是左右兩邊是恆等的，那麼當然我代什麼 x 值進去，函數值皆相等。而在代的時候，盡量代好算的值。注意到右式有兩項含有 $(x+1)$ ，所以代 $x = -1$ ：

$$-9 = 0 + 0 - c \Rightarrow c = 9$$

因為有兩項含有 x ，所以代 $x = 0$ ：

$$6 = a + 0 + 0$$

現在就差 b 了， $x = 0$ 和 $x = -1$ 都代過了，怎麼辦呢？此時有兩種選擇：第一，沒人規定一定要看著因式代，那只不過是會出現 0 感覺簡便而已，所以下一步我們可以代 $x = 2$ ，也可以代 $x = 1$ 。代什麼都好，盡可能好算就行。第二，比較二次係數： $5 = a + b$ 。比較係數法與代數值，並不是那麼涇渭分明，不是說你用了一個方法就要直通到底，其實可以靈活地隨時變換方法。

例題 5.5.2

$$\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx$$

解

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 \\ &= \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 &= A(x-1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 \\ &\quad + C(x-2)(x-1)^2 + D(x-1)^2 \end{aligned}$$

$$x = 1:$$

$$B = 1$$

$$x = 2:$$

$$D = 4$$

比較三次係數及常數項

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -4A + 4B - 2C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 4, C = -4$$

於是

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx \\ &= \int \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} dx \\ &= 4 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 4 \int \frac{dx}{x-2} + 4 \int \frac{dx}{(x-2)^2} \\ &= 4 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 4 \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + C \end{aligned}$$

例題 5.5.3

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$$

解

分解分母 $x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)$ ，故

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

$$\text{代值} \Rightarrow \begin{cases} (x=0) & 1 = -6A \\ (x=2) & 3 = 10B \\ (x=-3) & -2 = 15C \end{cases}$$

故

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15} \int \frac{dx}{x+3} \\
 &= -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{3}{10} \ln|x-2| - \frac{2}{15} \ln|x+3| + C
 \end{aligned}$$

以上便討論完分母只含一次因式的情況，現在我們要接著討論分母含有不可約 (irreducible) 二次式 $ax^2 + bx + c, b^2 - 4ac < 0$ 該如何處理。

首先最簡單的情況

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + C$$

接著考慮稍微複雜些， x^2 的係數是 a^2

$$\int \frac{dx}{1+a^2x^2}$$

我們要善於化未知為已知，設 $u = ax$ ，於是

$$\int \frac{\frac{1}{a} du}{1+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{a} \tan^{-1}(ax) + C$$

改為考慮常數項是 b^2

$$\int \frac{dx}{b^2+x^2}$$

改用參變代換，設 $x = bt$ ，於是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{b dt}{b^2 + b^2 t^2} &= \frac{b}{b^2} \int \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \frac{1}{b} \tan^{-1}(t) + C = \frac{1}{b} \tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) + C
 \end{aligned}$$

最一般的情況

$$\int \frac{dx}{b^2 + a^2 x^2}$$

設 $ax = bt$

$$\int \frac{\frac{b}{a} dt}{b^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{ab} \tan^{-1}(t) + C = \frac{1}{ab} \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}x\right) + C$$

所以對於分子是常數、分母是缺一次項的二次式 $\int \frac{dx}{b^2 + a^2x^2}$ ，我們現在都會做了，這一系列都和 \tan^{-1} 有關。至於分子如果是一次式，若設分母為 u ，那麼分母的導函數正是純一次項，所以只要直接將分子的兩項分開就好了。具體例子如

$$\int \frac{6x+5}{2+3x^2} dx = \int \frac{6x}{2+3x^2} dx + 5 \int \frac{dx}{2+3x^2}$$

後項就是剛剛才討論出來的類型，前項只要設 $u = 3x^2 + 2$, $du = 6x dx$ ，便可輕鬆做出。

討論完分母為缺一次項二次式的情況，要處理分母為一般的二次式 $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ 就容易了。化未知為已知，我們只要將其化為缺一次項的形式就好了，這個技巧我們早在國中就學過：配方法。例如

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2}$$

此時只要設 $x+1 = 2t$ ，就有

$$\int \frac{2 dt}{2^2 t^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}(t) + C = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

所以，分子為常數，分母為一般的不可約二次式，我們也都做了。至於連分子也是一次式的情況，在討論之前，先回去修改剛剛的作法。剛剛的過程是先配方，再設變數代換。現在修改成直接變數代換：

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2}$$

這裡我取一個名稱：配方代換。因為 $x^2 + 2x + 5$ 會配方成 $(x+1)^2 + 4$ ，所以設 $t = x+1$ 。既然前面討論完分母缺一次項的作法，所以有一次項就用配方代換來變成缺一次項。於是對於分子為一次式的情況即可寫成

$$\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{3t-4}{t^2+2^2} dt = 3 \int \frac{t dt}{t^2+2^2} - 4 \int \frac{dt}{t^2+2^2} \\
&= \frac{3}{2} \ln |t^2+2^2| - 4 \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C \\
&= \frac{3}{2} \ln |x^2+2x+5| - 2 \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

就這樣，一般的 $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ 我們都能對付了。

性質 5.5.1 $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ 的處理策略

對於 $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ ，用配方代換 $t = x + \frac{b}{2a}$ ，使其變成 $\int \frac{A't+B'}{a't^2+b'} dt$ ，再拆成 $A' \int \frac{t dt}{a't^2+b'} + B' \int \frac{dt}{a't^2+b'}$ ，前者用 $u = a't^2 + b'$ 代換、後者和 \tan^{-1} 有關。

理論上，對於

$$\frac{N(x)}{(x+2)^2(x-1)(x^2+2x+5)^3} \quad (5.12)$$

我們是可以拆成

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} \\
&+ \frac{Dx+E}{x^2+2x+5} + \frac{Fx+G}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{Hx+I}{(x^2+2x+5)^3}
\end{aligned} \quad (5.13)$$

待決定完係數之後，我們有四類形式的積分要解決：

$$\begin{aligned}
(1) &\int \frac{dx}{x+a} & (2) &\int \frac{dx}{(x+a)^n} \\
(3) &\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx & (4) &\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx
\end{aligned}$$

(1) 與 (2) 是最簡單的，直接可做出來。至於 (3) 則正是剛剛花些篇幅討論出了，所以現在也能對付。最麻煩的是 (4)，比較沒那麼容易。在進行對 (4) 的探討前我先聲明，各個微積分教科書中對此的介紹深淺不一，許多流行的歐美教科書都只是簡單帶過而已。所以你可以視自己需求決定要不要看這裡對 (4) 的討論，也可以先跳去看例題再說。

仿照剛剛的討論，先用配方代換來使分母變成缺一次項：

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \int \frac{A't + B'}{(a't^2 + b')^n} dt$$

再仿照剛剛，拆成

$$A' \int \frac{t dt}{(a't^2 + b')^n} + B' \int \frac{dt}{(a't^2 + b')^n}$$

前項直接設分母為 u 就解決了，所以我們剩下 $\int \frac{dt}{(a't^2 + b')^n}$ 的問題。而這又可簡稱為 $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$ 的問題，因為正如前面所示，我們總是可以透過代換來讓那兩個係數變成 1。

先看個簡單一點的 $n = 2$ ：

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \int \frac{\sec^2(t) dt}{\sec^4(t)} \quad \boxed{x = \tan(t)} \\ &= \int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4} + C \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan(t)}{\sec^2(t)} + C \\ &= \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + C \end{aligned}$$

看起來只要簡單做個三角代換 $x = \tan(t)$ 就好，不過隨著 n 越大，代換完畢後的 $\int \cos^{2n-2}(t) dt$ 也就越麻煩。實際上也不太須要擔心，因為一般來說，大一微積分課程不會真的拿分母有不可約二次式的高次項來惡搞你。另一個方法是寫出漸降式

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^n} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \int x \cdot \frac{x dx}{(x^2 + 1)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{\text{分部積分}} &= I_{n-1} - \left[-x \cdot \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \right] \\
 &= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}
 \end{aligned}$$

當 $n=1$ 時是我們熟悉的 $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}(x) + C$ 。接著依序寫出

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \tan^{-1}(x) + C$$

$$I_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8} \tan^{-1}(x) + C$$

依次類推，理論上所有次方都是能對付的。

例題 5.5.4

$$\int \frac{dx}{x^3+1}$$

解

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

比較係數得

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{2}{3}$$

若要代數值，第一步代 $x=-1$ 可得 $A = \frac{1}{3}$ ；接著代 $x=0$ ，可避免 B 的出現，得 $A+C=1$ ；最後再隨意

代，或者直接看領導係數，解出 B 。於是

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx$$

$$\boxed{\text{配方代換 } x - \frac{1}{2} = t} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt$$

$$\boxed{\text{拆項}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}}$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\boxed{t = \frac{\sqrt{3}}{2}k} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{2} du}{u}$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dk}{\frac{3}{4}k^2 + \frac{3}{4}}$$

$$2mm] = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|u|$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dk}{k^2+1} + C$$

$$= \frac{1}{6} \left(2 \ln|x+1| - \ln|x^2-x+1| \right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}(k) + C$$

$$= \frac{1}{6} \left(\ln(x+1)^2 - \ln|x^2-x+1| \right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} \right|$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

有理函數的積分，經常會做到後面式子很複雜。但我們已經理出一般性的策略，只要按這模式，就可以解決有理函數的積分。縱使過程複雜，只要耐著性子寫，通常不難寫出來。

例題 5.5.5

$$\int \frac{dx}{x^4+1}$$

解

首先應注意

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 \\ &= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) \end{aligned} \quad \boxed{\text{平方差公式}}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4+1} &= \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \\ \Rightarrow 1 &= (Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1) \end{aligned}$$

比較常數項，可得 $B+D=1$ ；比較 x^3 係數，可得 $A+C=0$ ；比較 x^2 係數，可得 $B-\sqrt{2}A+D+\sqrt{2}C=1+2\sqrt{2}C=0$ ；最後再比較一次係數，就可以解出 $A=\frac{\sqrt{2}}{4}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{\sqrt{2}}{4}, D=\frac{1}{2}$ 。於是

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{x^4+1} \\ &= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\int \frac{t + \frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2 + \frac{1}{2}} dt - \int \frac{k - \frac{\sqrt{2}}{2}}{k^2 + \frac{1}{2}} dk \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\int \frac{t}{t^2 + \frac{1}{2}} dt - \int \frac{k}{k^2 + \frac{1}{2}} dk \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} + \int \frac{dk}{k^2 + \frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\ln \left| t^2 + \frac{1}{2} \right| - \ln \left| k^2 + \frac{1}{2} \right| \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}k) \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) \right. \\
&\quad \left. - \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} \right) + C
\end{aligned}$$

例題 5.5.6

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x + 2)} dx$$

解

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x + 2)} &= \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \\
\Rightarrow x^2 - 1 &= A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 2)
\end{aligned}$$

代 $x = -2$ 得 $3 = 5A$; 代 $x = 0$ 得 $-1 = A + 2C$; 比較領導係數得 $1 = A + B$ 。故可解出 $A = \frac{3}{5}, B = \frac{2}{5}, C = -\frac{4}{5}$ 。於是

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x + 2)} dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{5} \int \frac{x dx}{x^2+1} - \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{3}{5} \ln|x+2| + \frac{1}{5} \ln|x^2+1| - \frac{4}{5} \tan^{-1}(x) + C \end{aligned}$$